

طرح درس نهایی: مبانی آنالیز ریاضی

اطلاعات دوره

تدریس: دکتر مجید کوکبی دانشکده: علوم پایه دوره: کارشناسی / پیشرفته کارشناسی واحد: 3
واحد نظری (1+3 در صورت کارگاهها) ساعات: 3 ساعت نظری + 1 ساعت تمرین هفتگی
پیش‌نیاز: ریاضیات پایه (آنالیز 1 یا معادل)

خلاصه درس

این درس چارچوب‌های بنیادی آنالیز ریاضی را به صورت اثبات‌محور و با تأکید بر شهود هندسی، تحلیل عددی ساده و فعالیت‌های چندحسی آموزش می‌دهد. موضوعات اصلی شامل ساختار اعداد حقیقی، فضاها، متریک، دنباله‌ها و سری‌ها، حد و پیوستگی، قضایای بنیادین (مانند هاینه-بورل، تکمیل، قضایای مقدار میانی و نقاط ثابت) و نحوه نوشتن اثبات‌های ریاضی منظم خواهد بود. هدف اصلی، ارتقاء درک عمیق مفاهیم انتزاعی از طریق رویکردی چندوجهی است که هم بر دقت منطقی و هم بر بصیرت شهودی تکیه دارد.

اهداف کلی

- درک و اثبات: درک عمیق و توانایی اثبات خواص بنیادین اعداد حقیقی و فضاها، متریک.
- تحلیل دنباله‌ها و سری‌ها: توانایی تحلیل دنباله‌ها، سری‌ها و استفاده از آزمون‌های همگرایی به صورت اثباتی.
- مهارت‌های اثبات و ارائه: مهارت در نوشتن اثبات‌های ریاضی دقیق و ارائه شفاهی منطقی و ساختاریافته.
- تفکر انتقادی: ایجاد تفکر انتقادی، شهودی و عددی نسبت به مفاهیم انتزاعی در آنالیز ریاضی.

نتایج یادگیری رفتاری (قابل اندازه‌گیری)

پس از پایان درس، دانشجو قادر خواهد بود:

1. اصل تمامیت (Completeness): اصل تمامیت را فرمول‌بندی و برای مثال در $\mathbb{R}$ اثبات نماید.
2. فضاهای متری: فضای متریک را تعریف کرده و مثال‌های مرتبط با همگرایی، کامل بودن و فشردگی را تحلیل نماید.
3. سری‌های عددی: ویژگی‌های سری‌های عددی را تشخیص دهد و از آزمون‌های ریشه، نسبت، مقایسه و لیبِنیز برای تعیین همگرایی آن‌ها استفاده کند.
4. پیوستگی و نقاط ثابت: پیوستگی و پیوستگی یکنواخت را از هم تمییز دهد و قضایای مقدار میانی و نقاط ثابت را در مسائل کاربردی اعمال کند.
5. مهارت‌های تحلیلی و نگارشی: اثبات‌های کوتاه و ساختاریافته با استفاده از LaTeX تهیه نماید و در فرآیند ارزیابی همتا (peer review) مشارکت فعال داشته باشد.

ساختار هفتگی (14 هفته)

هفته 1: معرفی و مبانی * معرفی دوره، شرح اهداف، انتظارات و پورتفولیو. * مبانی مجموعه‌ها، روابط، توابع. * ساختار میدان‌ها (Field Axioms). * مرور پیش‌نیازها: آشنایی با منطق ریاضی و مقدمات اثبات. * شرح و توزیع پورتفولیوی اثبات.

هفته 2: اعداد حقیقی — ساختار و تکمیل * مدل‌سازی اعداد حقیقی. * تکمیل اعداد گویا ($\mathbb{Q}$) با استفاده از برش‌های ددکیند (Dedekind cuts) یا دنباله‌های کوشی. * معرفی مفهوم تمامیت (Completeness) در فضای اعداد حقیقی.

هفته 3: اصل تمامیت و خواص اعداد حقیقی * اصل تمامیت (Completeness Axiom) یا اصل سوپرمم (Supremum Axiom). * خاصیت ارشمیدسی (Archimedean Property). * تراکم اعداد گویا ($\mathbb{Q}$) و گنگ ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) در اعداد حقیقی.

هفته 4: اعداد مختلط و نامساوی کوشی-شوارتز * میدان مختلط ($\mathbb{C}$): تعریف، خواص و نمایش هندسی. * نامساوی کوشی-شوارتز (Cauchy-Schwarz Inequality) در فضاهای برداری (مانند $\mathbb{R}^n$). * کاربردها و مثال‌های متنوع.

هفته 5: فضاهای متری — تعاریف و مثال‌ها * تعریف فضای متریک (X, d) . * مثال‌های متداول: $\mathbb{R}^n$ با متر اقلیدسی، متر منهن، متر ماکسیمم. * توپ‌ها (Balls) و همسایگی‌ها (Neighborhoods).

هفته 6: توپولوژی فضاهای مترى * مجموعه‌های باز (Open Sets) و بسته (Closed Sets) در فضاهای مترى. * نقاط تجمع (Limit Points) و نقاط حدی (Accumulation Points). * همگرایی دنباله‌ها در فضاهای مترى.

هفته 7: فشردگی و قضایای بنیادین * تعریف مجموعه‌های فشرده (Compact Sets) در فضاهای مترى. * قضیه هاینه-بورل (Heine-Borel Theorem) در $\mathbb{R}^n$. * کاربرد پیوستگی بر فضاهای فشرده: دامنه مقادیر پیوسته.

هفته 8: دنباله‌ها و کامل بودن * دنباله‌های کوشی (Cauchy Sequences). * مفهوم کامل بودن (Completeness) یک فضای متریک. * رابطه دنباله‌های کوشی و کامل بودن. * زیر دنباله‌ها (Subsequences) و لم بالا/پایین (Up/Down Lemma) (در صورت امکان).

هفته 9: سری‌های عددی — همگرایی * تعریف سری عددی و مفهوم همگرایی. * همگرایی مطلق (Absolute Convergence) و همگرایی شرطی (Conditional Convergence). * آزمون‌های اصلی همگرایی: آزمون نسبت (Ratio Test)، آزمون ریشه (Root Test)، آزمون مقایسه (Comparison Test).

هفته 10: سری‌های متناوب و بازآرایی * سری‌های متناوب (Alternating Series) و آزمون لیبینز (Leibniz Test). * قضیه ریمان درباره بازآرایی‌ها (Riemann Series Theorem). * مثال‌ها و کاربردها.

هفته 11: حد و پیوستگی توابع * حد (Limit) و پیوستگی (Continuity) توابع بین فضاهای مترى. * قضیه مقدار میانی (Intermediate Value Theorem). * مثال‌های تکمیلی در فضاهای مترى.

هفته 12: پیوستگی یکنواخت و نقاط ثابت * پیوستگی یکنواخت (Uniform Continuity) و تمایز آن با پیوستگی نقطه‌ای. * قضیه‌های لیشیتز (Lipschitz Conditions). * مقدمات نظریه نقاط ثابت (Fixed Point Theory) و قضیه نقطه ثابت باناخ (Banach Fixed Point Theorem).

هفته 13: مباحث تکمیلی و مرور * مباحثی مانند مجموعه کانتور (Cantor Set) و همبندی (Connectedness). * مرور اثبات‌های کلیدی دوره. * جلسه پرسش و پاسخ برای رفع اشکالات.

هفته 14: ارائه پروژه‌ها و آزمون جامع * ارائه پروژه‌های دانشجویی (اثبات‌محور و اپلت‌های عددی). * آزمون جامع نهایی. * بازخورد نهایی و جمع‌بندی دوره.

روش‌های تدریس

- فرمت معکوس کلاس (Flipped Classroom):
 - Micro-lectures: ویدیوهای کوتاه (5-15 دقیقه) ارائه مفاهیم نظری و اثبات‌های اولیه.
 - مطالعه پیش‌خوان: دانشجویان قبل از حضور در کلاس، ویدیوها را مشاهده کرده و مطالب را مطالعه می‌کنند.
 - جلسه فعال: جلسات کلاسی به بحث، حل مسئله، کار بر روی اثبات‌ها، و فعالیت‌های گروهی اختصاص می‌یابد.
 - جلسات کارگاهی:
 - GeoGebra: کارگاه‌های عملی برای استفاده از GeoGebra جهت بصری‌سازی مفاهیم هندسی و توپولوژیکی.
 - Jupyter Notebooks: کارگاه‌هایی برای آشنایی با نوت‌بوک‌های Jupyter و تجربه عددی با دنباله‌ها، سری‌ها و خطاها.
 - AR/VR: یک کارگاه انتخابی برای تجربه مفاهیم انتزاعی در محیط‌های واقعیت افزوده یا مجازی (در صورت امکان).
 - یادگیری فعال:
 - بحث جفتی (Pair Discussion): دانشجویان در گروه‌های دو نفره به حل مسائل و بحث درباره اثبات‌ها می‌پردازند.
 - ارزیابی همتا (Peer Assessment): دانشجویان اثبات‌های یکدیگر را بر اساس روبریک مشخصی ارزیابی می‌کنند.
 - فعالیت‌های کارت‌محور (Card-Based Activities): استفاده از کارت‌هایی با مراحل اثبات یا تعریف مفاهیم برای درگیر کردن فعال دانشجویان.
 - ارائه اثبات‌ها:
 - ابتدا اثبات‌های کلیدی روی تابلو با توضیح شهودی و بصری ارائه می‌شوند.
 - سپس، نسخه فرمال و دقیق اثبات با استفاده از نمادگذاری ریاضی و استدلال منطقی نمایش داده می‌شود.
-

فعالیت‌های چندحسی و فناوری

- انیمیشن‌های اثبات:
 - ویدیوهای کوتاه (8-12 دقیقه) با زیرنویس فارسی و متن خلاصه اثبات‌ها که در سامانه مدیریت یادگیری (LMS) در دسترس خواهند بود.
 - هدف: تسهیل درک اثبات‌های پیچیده و ارائه رویکردی شهودی.
 - اپلت‌های GeoGebra:
 - اپلت‌های تعاملی برای هر بخش کلیدی درس:
 - بصری‌سازی توپ‌ها و همسایگی‌ها در فضاها متری.
 - نمایش پوشش‌های باز و قضیه هاینه-بورل.
 - تصویرسازی تراکم اعداد گویا و گنگ.
 - ساخت مجموعه کانتور.
 - این اپلت‌ها به دانشجویان کمک می‌کنند تا مفاهیم انتزاعی را به صورت بصری درک کنند.
 - نوت‌بوک‌های Jupyter:
 - نوت‌بوک‌های تعاملی برای تجربه عددی:
 - بررسی رفتار دنباله‌های کوشی و گام‌های تکمیل.
 - شبیه‌سازی همگرایی سری‌ها و مقایسه سرعت همگرایی.
 - بررسی خطاهای تقریب در محاسبات عددی.
 - این ابزارها به دانشجویان اجازه می‌دهند تا یافته‌های نظری را در عمل مشاهده کنند.
 - کیت کارگاهی فیزیکی:
 - شامل کارت‌های مراحل اثبات، توپ‌های فومی برای نمایش توپ‌ها، و برگه‌های آماده برای ساخت مجموعه کانتور.
 - هر قطعه با QR کد به منابع دیجیتال مربوطه (ویدیو، اپلت، نوت‌بوک) متصل خواهد بود.
 - دسترسی برای دانشجویان غیرحضوری:
 - معادل دیجیتال همه ابزارهای فیزیکی (اپلت‌ها، نوت‌بوک‌ها، ویدیوها) در LMS در دسترس خواهد بود.
-

ارزیابی و وزن دهی

وزن	نوع ارزیابی	جزئیات
20%	تمرینات هفتگی (پورتفولیو اثبات‌ها)	شامل حداقل 6 اثبات منتخب با توضیحات شهودی (حداکثر 200 کلمه) و اثبات فرمال در LaTeX. تحویل به صورت PDF.
25%	آزمون میان‌ترم	آزمون کتبی شامل مسائل نظری، اثباتی و کاربردی. تمرکز بر مباحث نیمسال اول.
20%	پروژه اثبات‌محور + اپلت عددی	پروژه انفرادی یا گروهی (2-3 نفره) برای بررسی عمیق یک موضوع. خروجی شامل گزارش LaTeX، اپلت GeoGebra و نوت‌بوک Jupyter.
5%	مشارکت کلاسی و ارزیابی همتا	حضور فعال در کلاس، مشارکت در بحث‌ها، و ارزیابی دقیق کارهای همکلاسی‌ها.
30%	آزمون پایان‌ترم	آزمون جامع نهایی شامل تمام مباحث دوره. تمرکز بر درک مفاهیم و توانایی اثبات.
100%	مجموع	

جزئیات پورتفولیو و ارزیابی همتا

پورتفولیو اثبات‌ها

- تعداد: حداقل 6 اثبات منتخب از مباحث دوره.
- قالب: هر اثبات باید در LaTeX نوشته شده و به صورت PDF تحویل داده شود.
- محتوا:
 - توضیح شهودی: شرحی حداکثر 200 کلمه‌ای از ایده اصلی اثبات، هدف آن و استراتژی کلی. این بخش برای نشان دادن درک عمیق و بصیرت دانشجو طراحی شده است.
 - اثبات فرمال: نسخه دقیق و گام به گام اثبات با استفاده از نمادگذاری ریاضی استاندارد و استدلال منطقی.
- نحوه تحویل: از طریق سامانه LMS.

ارزیابی همتا (Peer Review)

- فرآیند: دانشجویان در گروه‌های کوچک، اثبات‌های اعضای گروه خود را بر اساس روبریک ارائه شده، ارزیابی می‌کنند.

- هدف: ارتقاء مهارت‌های نقد و بررسی، یادگیری از اشتباهات دیگران و درک معیارهای اثبات خوب.
- روبریک ارزیابی هم‌تا (نمونه):

معیار	نمره	توضیحات
صحت ریاضی	4-0	تمام ادعاها، استدلال‌ها و محاسبات از نظر ریاضی صحیح هستند.
ساختار و منطق	4-0	اثبات دارای ساختار منطقی مشخصی است؛ هر گام به درستی از گام‌های قبلی یا اصول بدیهی نتیجه می‌شود.
شفافیت و خوانایی/ LaTeX	3-0	نمادگذاری ریاضی واضح است؛ متن به خوبی سازماندهی شده و خوانا است؛ استفاده صحیح از LaTeX.
نوآوری/بینش	1-0	اثبات رویکردی خلاقانه یا بینشی نوآورانه ارائه می‌دهد (بخش اختیاری برای تشویق تفکر عمیق).
مجموع	-0 12	

- محاسبه نمره نهایی پورتفولیو:
- نمره هر دانشجو از پورتفولیوی خودش، بر اساس میانگین نمرات ارزیابی هم‌تا (پس از حذف یک نمره بیشینه و یک نمره کمینه برای کاهش اثر نمرات پرت) و ارزیابی مدرس محاسبه می‌شود.
- فرمول:

$$(\text{نمره مدرس}) \times 0.4 + (\text{میانگین نمرات هم‌تا}) \times 0.6 = \text{نمره نهایی پورتفولیو}$$

پروژه نهایی

- هدف:
- بررسی عمیق یک موضوع خاص در مبانی آنالیز ریاضی (مانند اثبات‌های متفاوت تکمیل $\mathbb{R}$ ، بررسی عددی همگرایی سری‌ها و اثر بازآرایی، مطالعه خواص فضاهای متریک خاص).
- تولید خروجی‌های ترکیبی شامل تحلیل نظری، پیاده‌سازی عددی و بصری‌سازی.
- خروجی مورد انتظار:
- گزارش LaTeX: حداقل 10 صفحه، شامل مقدمه، مباحث نظری، نتایج، تحلیل و نتیجه‌گیری.
- اپلت تعاملی: یک اپلت GeoGebra که بخش‌هایی از پروژه را بصری‌سازی می‌کند.
- نوت‌بوک عددی: یک نوت‌بوک Jupyter که جنبه‌های عددی پروژه را بررسی می‌کند.

- ارائه: یک ارائه 10-15 دقیقه‌ای در کلاس (حضور یا مجازی).

- جدول زمانی پروژه:

- هفته 4: انتخاب موضوع و تشکیل گروه‌ها (در صورت گروهی بودن).
- هفته 7: ارائه گزارش میانی (شامل طرح کلی، پیشرفت و مسائل احتمالی).
- هفته 10: پیش‌نمایش اپلت و نوت‌بوک Jupyter.
- هفته 14: تحویل نهایی گزارش، اپلت، نوت‌بوک و ارائه پروژه.

نمونه سیاست‌های کلاسی

- تاخیر در تحویل:

- تحویل‌های تاخیری تنها با دلیل موجه و مستند (مانند گواهی پزشکی) پذیرفته می‌شوند.
- برای هر روز تاخیر، از نمره کل آن تکلیف کسر خواهد شد (مثلاً 10% کسر به ازای هر روز).

- استفاده از هوش مصنوعی (AI):

- استفاده از ابزارهای AI (مانند ChatGPT) برای کمک به نگارش، ایده‌یابی و اشکال‌زدایی مجاز است.
- الزام: تمام بخش‌هایی که با کمک AI تولید شده‌اند، باید به وضوح منبع‌دهی شوند. سهم دانشجو و سهم AI باید مشخص گردد. عدم رعایت این مورد تقلب محسوب می‌شود.

- تقلب و سرقت علمی:

- هرگونه تقلب (کپی‌برداری از دیگران، استفاده از منابع بدون ذکر، تحویل کار دیگران به نام خود) مطابق با آیین‌نامه انضباطی دانشگاه مورد رسیدگی قرار خواهد گرفت.
- پورتفولیو و پروژه‌ها باید شواهد روشنی از تلاش و پیشرفت فردی دانشجو را نشان دهند.

- حضور و غیاب:

- حضور در جلسات نظری الزامی است. غیبت‌های موجه (با ارائه مدرک) تا سقف مجاز دانشگاه قابل قبول است.
-

قابل دسترس سازی و شمول

- دسترسی به محتوا:
 - تمام ویدیوهای آموزشی دارای کپشن فارسی و متن قابل دانلود (transcript) هستند.
 - اسناد متنی (طرح درس، جزوات، تکالیف) با فرمت های قابل دسترس (مانند PDF) با قابلیت خواندن توسط نرم افزارهای صفحه خوان ارائه می شوند.
- مواد بصری:
 - رنگ بندی در اسلایدها، نمودارها و اپلت ها به گونه ای طراحی شده است که برای افراد دارای کوررنگی (color blindness) قابل تمایز باشد.
 - استفاده از الگوهای کافی (patterns) و برچسب های واضح.
- گزینه های ارائه:
 - برای دانشجویانی که با چالش های زبانی یا نوشتاری روبرو هستند، گزینه های جایگزین برای ارائه مطالب (مانند ارائه شفاهی ویدئویی به جای نوشتاری) در نظر گرفته خواهد شد.
 - استفاده از ابزارهای کمک آموزشی متنوع برای پوشش دادن طیف وسیعی از سبک های یادگیری.

منابع پیشنهادی

کتاب های اصلی:

1. Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis (3rd ed). McGraw-Hill, 1976. (کتاب کلاسیک، رویکرد اثبات محور و دقیق)
2. T. M. Apostol, Mathematical Analysis (2nd ed). Addison-Wesley, 1974. (پوشش جامع، مناسب برای مباحث پیشرفته تر)
3. Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert, Introduction to Real Analysis. Wiley, (چاپ های مختلف). (رویکردی تدریجی و دوستانه تر برای دانشجویان)
4. Wilfrid M. Kaczor, Maria M. Nowak, Problems in Mathematical Analysis I. AMS, 2000. (مجموعه مسائل متنوع با راه حل های تفصیلی، مناسب برای تمرین)

منابع فارسی پیشنهادی:

- (در صورت وجود، ذکر کتاب ها یا جزوات ترجمه شده یا تألیف شده توسط اساتید داخلی)

• جزوات درسی و فایل‌های مربوط به دوره که در سامانه LMS آماده خواهند شد.

پیوست‌ها (خلاصه)

پیوست A: اسکرپت کوتاه انیمیشن نمونه * موضوع: تکمیل اعداد حقیقی با استفاده از دنباله‌های کوشی. * شامل: مراحل اثبات، نمودار نمایش دنباله، خلاصه متن.

پیوست B: راهنمای سریع GeoGebra * راهنمای گام به گام برای استفاده از GeoGebra در جلسه اول. * شامل: معرفی ابزارها، لینک به اپلت‌های نمونه.

پیوست C: قالب LaTeX برای پورتفولیو و پروژه * قالب آماده فایل `tex`. شامل ساختار کلی، دستورات رایج ریاضی، بخش شهودی و فرمال. * برای استانداردسازی و سهولت در نگارش اثبات‌ها.

پیوست D: فهرست کارت‌ها و محتوای کیت کارگاهی * فهرست دقیق کارت‌های مورد استفاده در فعالیت‌های کلاسی (مراحل اثبات، تعاریف). * توضیح محتوای کیت فیزیکی (توپ فومی، برگه کانتور). * QR کدهای مرتبط با هر قلم برای دسترسی به منابع دیجیتال.

راهنمای سریع برای استفاده از طرح درس

1. آماده‌سازی اولیه (هفته قبل از شروع):

- تهیه و بارگذاری Micro-lectures هفتگی در LMS.
- آماده‌سازی و انتشار فایل GeoGebra برای جلسه اول.
- ارسال تکلیف مطالعه پیش‌خوان (Read Ahead Assignment) به دانشجویان برای هم‌سطح‌سازی دانش اولیه.

2. جلسات اول (هفته 1):

- پخش انیمیشن Micro-lecture.
- فعالیت عملی با GeoGebra در کلاس.
- ارائه کوئیز 5 دقیقه‌ای برای سنجش درک اولیه.
- توضیح دقیق پورتفولیو، نحوه ارزیابی همتا و انتظارات.

3. معرفی ابزارهای کارگاهی (هفته 2-3):

- معرفی Jupyter Notebooks.

- برگزاری کارگاه اجباری برای آشنایی دانشجویان با محیط Jupyter و نحوه کار با نوت‌بوک‌ها.

4. مدیریت پروژه:

- تنظیم دقیق زمان‌بندی پروژه (انتخاب موضوع، گزارش میانی، پیش‌نمایش، تحویل نهایی) در LMS.
 - در دسترس قرار دادن قالب LaTeX برای پورته‌فولیو و پروژه از ابتدای ترم.
- #### 5. برگزاری کارگاه‌های عملی:

- برنامه‌ریزی برای حداقل دو جلسه کارگاهی اختصاصی در طول ترم برای کیت فیزیکی و/یا AR/VR.
- اطمینان از حضور و مشارکت دانشجویان در این کارگاه‌ها.

اطلاعات تماس استاد

دکتر مجید کوکبی

- ایمیل: [ایمیل استاد را اینجا قرار دهید]
- دفتر: [شماره دفتر یا اتاق را اینجا قرار دهید]
- ساعت ملاقات: [روزها و ساعات ملاقات را اینجا مشخص کنید]

توضیح: این نسخه طرح‌درس شامل ساختار کلی، اهداف، روش‌ها و برنامه‌ریزی دوره است. نسخه نهایی PDF این سند، علاوه بر موارد فوق، شامل جداول کامل روبریک‌ها، قالب‌های نمونه LaTeX، و QR کدها برای اپلت‌های تعاملی خواهد بود. در صورت نیاز، فایل‌های GeoGebra و نوت‌بوک‌های Jupyter نیز به صورت زیپ همراه با PDF اصلی ارائه خواهند شد.

دکتر کوکبی — طرح‌درس آماده برای استفاده و انتشار در LMS.